2005年　東大数学　文系 第3問 ①

0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ をみたしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとるの値の範囲を求めよ。

x = 解

問題文

⇕

$s \geqq 0$ かつ $t \geqq 0$ かつ $s^2+t^2=1$　制約条件

かつ

$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$　目的関数

となる (s,t) が存在　2文字なので線型計画法

⇕

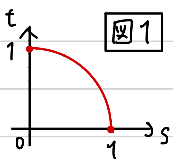
x の値域

逆像法の論理に書き直した。

制 について，

$s \geqq 0$, $t \geqq 0$, $s^2+t^2=1$ を図示すると，右図の赤線部

図1



目 について，

$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$　展開

$x^4-2(s+t)x^2+\underbrace{s^2+t^2}_{=1}-2st=0$

$$\boxed{-2x^2(s+t)-2st+1+x^4=0 \cdots (*)}$$

$s+t$ と st が登場

この式で，図1が共有点を持てばよいが，どんなグラフかわからない。

解法1：実数条件を利用

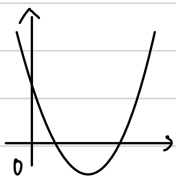
$s+t$ と st が登場するので，実数条件を利用。

$\begin{cases} s+t=A \\ st=B \end{cases}$ と置換すると

(i) s と t は，ある u に関する2次方程式 $\underbrace{u^2-Au+B=0}_{f(u)}$ の解である。

目 より $s \geqq 0$ $t \geqq 0$ なので $f(u)=0$ は 0以上の2解（重解含む）をもつ。

よって，$\begin{cases} D \geqq 0 \\ \text{軸} \geqq 0 \\ f(0) \geqq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2-4B \geqq 0 \\ \frac{A}{2} \geqq 0 \\ B \geqq 0 \end{cases}$ — ①



(ii) $s^2+t^2=1$ より $(s+t)^2-2st=1$　$\therefore A^2-2B=1$ — ②

(iii) $(*)$ より

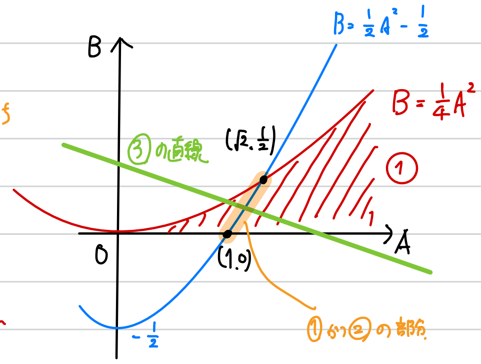
$-2x^2A-2B+1+x^4=0$ — ③

以上より，① かつ ② の領域で，③ が共有点を持てばよい！

① $\Leftrightarrow$ $B \leqq \frac{1}{4}A^2$ かつ $A \geqq 0$ かつ $B \geqq 0$　放物線の下かつ第1象限と軸上

② $\Leftrightarrow$ $B=\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}$　放物線上

③ $\Leftrightarrow$ $B=-x^2A+\frac{1}{2}(1+x^4)=f(A)$ とおく。（傾き $-x^2$ 切片 $\frac{1}{2}(1+x^4)$ の直線上）



右図より

③の直線が $B=\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{2}$ のうち $(1,0)$ と $(\sqrt{2},\frac{1}{2})$ の間を通ればよい。

$B=f(A)$ の直線において，

$f(1) \geqq 0$ かつ $f(\sqrt{2}) \leqq \frac{1}{2}$

となればよい。

$f(1) \geqq 0$ より，$-x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^4 \geqq 0$

$x^4-2x^2+1 \geqq 0$　$(x^2-1)^2 \geqq 0$ より　x は全ての実数

$f(\sqrt{2}) \leqq \frac{1}{2}$ より　$-\sqrt{2}x^2+\frac{1}{2}(1+x^4) \leqq \frac{1}{2}$

$x^4-2\sqrt{2}x^2 \leqq 0$　$x^2(x^2-2\sqrt{2}) \leqq 0$　$\therefore 0 \leqq x^2 \leqq 2\sqrt{2}$

$0 \leqq x^2$ は全ての実数で成立するので，$x^2 \leqq 2\sqrt{2}$ のみを解き，

$-\sqrt{2\sqrt{2}} \leqq x \leqq \sqrt{2\sqrt{2}}$

以上より　$-\sqrt{2\sqrt{2}} \leqq x \leqq \sqrt{2\sqrt{2}}$

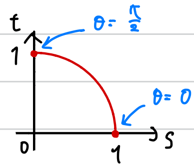
解法2：三角関数を利用

$s^2+t^2=1$ から，$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ の置換を思いつく。

$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ で置換すると

目 は，単位円の $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分なので，

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$



制 は，$(*)$ に代入して，

$-2x^2(\cos\theta+\sin\theta)-2\cos\theta\sin\theta+1+x^4=0$

$\cos\theta+\sin\theta$ と $\cos\theta\sin\theta$ があるので，$\cos\theta+\sin\theta=k$ で置換。

$\cos\theta+\sin\theta=k$ とおく。

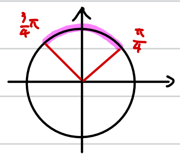
$(\cos\theta+\sin\theta)^2=k^2$　$1+2\sin\theta\cos\theta=k^2$　$\therefore \cos\theta\sin\theta=\frac{k^2-1}{2}$

2005年　東大数学　文系　第3問②

$k = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ から，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$ なので

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$　　$1 \leqq k \leqq \sqrt{2}$



$(\cos\theta, \sin\theta)$ は単位円上の点なので

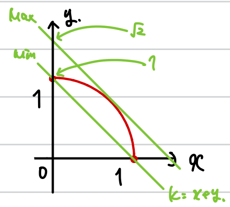
$k = \cos\theta + \sin\theta$ は

$k = x + y$ と $x^2 + y^2 = 1$ との交点を

考えればよい。

右図から，$k = x + y$ の切片を見て，

$1 \leqq k \leqq \sqrt{2}$.



kの範囲の別解

よって $(*)$ から，

$$-2x^2k - 2 \times \frac{k^2-1}{2} + 1 + x^4 = 0$$

$\underbrace{k^2 + 2x^2k - x^4 - 2}_{g(k)\text{ とおく}} = 0$　が

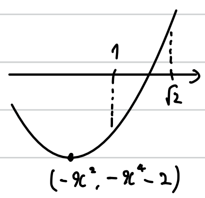
$1 \leqq k \leqq \sqrt{2}$ に少なくとも1つ解を持てばよい。

$g(k) = (k + x^2)^2 - 2x^4 - 2$ より

頂点は $(-x^2, -2x^4 - 2)$　　軸$\leqq 0$，頂点の $y < 0$

よって $1 \leqq k \leqq \sqrt{2}$ に解を持つためには

$g(1) \leqq 0$ かつ $g(\sqrt{2}) \geqq 0$ となればよい



$g(1) \leqq 0$ より

$1 + 2x^2 - x^4 - 2 \leqq 0$

$x^4 - 2x^2 + 1 \geqq 0$

$(x^2 - 1)^2 \geqq 0$　　すべての実数

$g(\sqrt{2}) \geqq 0$ より

$2 + 2\sqrt{2}x^2 - x^4 - 2 \geqq 0$

$x^4 - 2\sqrt{2}x^2 \leqq 0$　　$\therefore -\sqrt{2\sqrt{2}} \leqq x \leqq \sqrt{2\sqrt{2}}$

解法1を参照

以上より　$-\sqrt{2\sqrt{2}} \leqq x \leqq \sqrt{2\sqrt{2}}$ //